카이 전공수학 기출문제집 정오표

◎교재 247 페이지 (46번) 문제

수정 전 :

46. 실수 전체의 집합 $\boldsymbol{R}$ 위의 보통위상(usual topology)을 $\mathfrak{I}$ 라 하고, 함수

$$f : \boldsymbol{R} \to [0, 1) \text{ 을 } f(x) = x - [x]$$

로 정의하자. 집합 $[0, 1)$ 위의 위상 $\mathfrak{I}_0$ 을 $\mathfrak{I}_0 = \{G \subset [0, 1] \mid f^{-1}(G) \in \mathfrak{I}\}$ 로 정의하자. <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은 ? (2011)

수정 후 :

46. 실수 전체의 집합 $\boldsymbol{R}$ 위의 보통위상(usual topology)을 $\mathfrak{I}$ 라 하고, 함수

$$f : \boldsymbol{R} \to [0, 1) \text{ 을 } f(x) = x - [x]$$

로 정의하자. 집합 $[0, 1)$ 위의 위상 $\mathfrak{I}_0$ 을 $\mathfrak{I}_0 = \{G \subset [0, 1) \mid f^{-1}(G) \in \mathfrak{I}\}$ 로 정의하자. <보기>에서 옳은 것만을 모두 고른 것은 ? (2011)

◎교재 268 페이지 (12번) 문제

수정 전 :

실숫값을 갖는 두 함수

$$u(x, y), v(x, y) = e^{-y}(x\cos x - y\sin x)$$

와 복소수 $z = x + iy$ (x, y 는 실수)에 대하여, $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$ 가 정함수 (entire function)이다. 곡선 C가 $x = \cos t, y = \sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 로 정의된 원일 때,

$$\int_{-C} -yu(x, y) + xu(x, y)\,dy = 6\pi$$

이다. $f(0)$ 의 값과 함수 $u(x, y)$ 를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2019년 서술형]

수정 후 :

실숫값을 갖는 두 함수

$$u(x, y), v(x, y) = e^{-y}(x\cos x - y\sin x)$$

와 복소수 $z = x + iy$ (x, y 는 실수)에 대하여, $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ 가 정함수 (entire function)이다. 곡선 C가 $x = \cos t, y = \sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 로 정의된 원일 때,

$$\int_{C} -yu(x, y)dx + xu(x, y)\,dy = 6\pi$$

이다. $f(0)$ 의 값과 함수 $u(x, y)$ 를 각각 풀이 과정과 함께 쓰시오. [2019년 서술형]

◎교재 p.363(19번) 문제

수정 전 :

19. 확률밀도함수(probability density function)가 두 상수 a, b 에 대하여

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ a & , \ 0 \le x < 1 \\ 0 & , \ 1 \le x < \infty \end{cases}$$

인 분포를 따르는 모집단이 있다. 모집단에서 크기가 2 인 표본을 임의의 추출하였을 때, 표본평균 $\overline{X}$ 의 평균이 $\frac{3}{2}$ 이다. $a^2 + b^2$ 의 값은 ? [2011년 기출문제]

수정 후 :

19. 확률밀도함수(probability density function)가 두 상수 a, b 에 대하여

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ a & , \ 0 \le x < 1 \\ be^{1-x} & , \ 1 \le x < \infty \end{cases}$$

인 분포를 따르는 모집단이 있다. 모집단에서 크기가 2 인 표본을 임의의 추출하였을 때, 표본평균 $\overline{X}$ 의 평균이 $\frac{3}{2}$ 이다. $a^2 + b^2$ 의 값은 ? [2011년 기출문제]

◎교재 454페이지 (35번 해설 중)

수정 전 : $A = [[T_k(\overrightarrow{v_1})] \ \vdots \ [T_k(\overrightarrow{v_2})] \ \vdots \ [T_k(\overrightarrow{v_3})]]$

$$= \begin{pmatrix} k+2 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

수정 후 : $A = [[T_k(\overrightarrow{v_1})] \ \vdots \ [T_k(\overrightarrow{v_2})] \ \vdots \ [T_k(\overrightarrow{v_3})]]$

$$= \begin{pmatrix} k+2 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$$

◎교재 497페이지 (위에서 8번째 줄)

수정 전 :

(3) $[K:F] = [K:E][E:F] = 2[E:F] \ge 2$ 이므로 $\alpha \not\in F$ 이다. 한편

$p(x) = x^2 - (alpa + \alpha^{-1})x + \alpha \cdot \alpha^{-1} = (x-\alpha)(x+\alpha^{-1}) \in F[x]$ (참고: $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$)

수정 후 :

(3) $[K:F] = [K:E][E:F] = 2[E:F] \ge 2$ 이므로 $\alpha \not\in F$ 이다. 한편

$p(x) = x^2 - (\alpha + \alpha^{-1})x + \alpha \cdot \alpha^{-1} = (x-\alpha)(x+\alpha^{-1}) \in F[x]$ (참고: $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$)

◎교재 520페이지 (42번 ㄱ.) 해설 중

수정 전 :

ㄱ. ㈎ f' 을 증가함수라 가정하면 임의의 실수 $a \in \boldsymbol{R}$ 와 임의의 양의 실수 ϵ 에 대하여 f' 은 폐구간 $[a-\epsilon, a+\epsilon]$ 에서 유계인 함수이다. 따라서 임의의 원

$x, y \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$ 에 대하여 $|f'(x)-f'(y)| \le M|x-y|$

를 만족하는 양의 실수 $M(\ge 1)$ 이 존재한다. 이제 $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$ 로 놓으면

$$(a-\delta, a+\delta) \subset [a-\epsilon, a+\epsilon]$$

이다. $|x-a| < \delta$ 인 임의의 실수 x 에 대하여

$$|f'(x)-f'(a)| \le M|x-a| < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

이다. 따라서 f' 은 $x = a$ 에서 연속이다. 따라서 f' 은 연속함수이다.

㈏ f' 이 감소함수인 경우도 같은 이유에 의해서 주어진 명제는 참이다.

수정 후 :

ㄱ. Darboux의 정리에 의해서 f'이 단조함수이면 f'은 연속함수이다.

◎교재 521페이지 (43번 ㄷ.) 해설 중

수정 전 :

ㄷ. $(f')^3$ 이 증가함수이면 f' 도 증가함수이다. 따라서 임의의 실수 $a \in \boldsymbol{R}$ 와 임의의 양의 실수 ϵ 에 대하여 f' 은 폐구간 $[a-\epsilon, a+\epsilon]$ 에서 유계인 함수이다. 따라서 임의의 원

$x, y \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$ 에 대하여 $|f'(x)-f'(y)| \le M|x-y|$

를 만족하는 양의 실수 $M(\ge 1)$ 이 존재한다. 이제 $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$ 로 놓으면

$$(a-\delta, a+\delta) \subset [a-\epsilon, a+\epsilon]$$

이다. $|x-a| < \delta$ 인 임의의 실수 x 에 대하여

$$|f'(x)-f'(a)| \le M|x-a| < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

이다. 따라서 f' 은 $x = a$ 에서 연속이다.

따라서 $(f')^3$ 이 단조증가함수이면 f' 은 연속이다.

수정 후 :

ㄷ. $(f')^3$ 이 단조함수이면 f'도 단조함수이고 Darboux의 정리에 의해서 f'이 단조

함수이면 f'은 연속함수이다.

◎교재 569페이지 (19번) 해설 중

수정 전 :

(1) $\{[a, b) \times (c, d] \mid a, b, c, d \in \boldsymbol{R}\}$ 가 $(\boldsymbol{R}, \Im_l) \times (\boldsymbol{R}, \Im_u)$ 의 기저이다. 따라서

$A^0 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \mid -1 < x < 0, 0 < y < 1\}$

수정 후 :

(1) $\{[a, b) \times (c, d] \mid a, b, c, d \in \boldsymbol{R}\}$ 가 $(\boldsymbol{R}, \Im_l) \times (\boldsymbol{R}, \Im_u)$ 의 기저이다. 따라서

$A^0 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \left\{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right\}$

◎교재 590 페이지 (11번) 해설 중

수정 전 :

(1) $u(x, y) = (x^n y + xy^n + x + y)$ 로 놓으면 Cauchy-Riemann의 방정식을 만족하므로

$$\frac{\partial u}{\partial x} = nx^{n-1}y + y^n + 1 = \frac{\partial v}{\partial y}\ ;\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^n y + nxy^{n-1} + 1 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

이다. $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) = 1$ 이고 $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) = \begin{cases} -3 & , n = 1 \\ -2 & , n \geq 2 \end{cases}$ 이다. 또,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = nx^{n-1}y + y^n + 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ 이므로 } v(x, y) = \frac{n}{2}x^{n-1}y^2 + \frac{y^{n+1}}{n+1} + y + \phi(x)$$

이다. $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \phi'(x)$ 이고 $\frac{\partial u}{\partial y} = x^n y + nxy^{n-1} + 1 = -\frac{\partial v}{\partial x}$ 이므로 $n = 1$ 이다.

수정 후 :

(1) $u(x, y) = (x^n y + xy^n + x + y)$ 로 놓으면 Cauchy-Riemann의 방정식을 만족하므로

$$\frac{\partial u}{\partial x} = nx^{n-1}y + y^n + 1 = \frac{\partial v}{\partial y}\ ;\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^n y + nxy^{n-1} + 1 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

이다. $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) = 1$ 이고 $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) = \begin{cases} -3 & , n = 1 \\ -2 & , n \geq 2 \end{cases}$ 이다. 또,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = nx^{n-1}y + y^n + 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ 이므로 } v(x, y) = \frac{n}{2}x^{n-1}y^2 + \frac{y^{n+1}}{n+1} + y + \phi(x)$$

이다. $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \phi'(x)$ 이고 $\frac{\partial u}{\partial y} = x^n + nxy^{n-1} + 1 =- \frac{\partial v}{\partial x}$ 이므로

$n = 1$ 이다.

◎교재 p.590

수정 전 :

$g(z) = \frac{f(z)}{e^z - 1}$ 로 정의하면 양수 r 에 대하여 영역 $\{ z \in \boldsymbol{C} \mid 0 < |z-a| < r \}$ 에서 함수 $g(z)$ 가 해석적이고 $|g(z)| \le 1$ 이므로 $g(z)$ 는 유계이다. 정리에 의해서 $\lim_{z \to a} g(z)$ 가 존재하고 함수

$$h(z) = \begin{cases} g(z) & , \ 0 < |z| < r \\ \lim_{w \to 0} g(w) & , \ z = 0 \end{cases}$$

는 $z = 0$ 에서 해석적이다. 따라서 $h(z)$ 는 정함수이다. Lioville의 정리에 의해서 $h(z)$ 는 상수함수이다. 즉,

$$h(1) = g(1) = \frac{f(1)}{e-1} = \frac{1}{e-1}$$

이다. 따라서 $f(z) = \frac{e^z - 1}{e - 1}$ 이다.

따라서 $f'(z) = \frac{e^z}{e-1}$ 이다. 즉, $f'(1) = \frac{e}{e-1}$ 이다.

수정 후 :

$f(z)$ 가 정함수이므로 코쉬-리만의 방정식을 만족한다. 즉,

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) = -e^{-y}(x\cos x - y\sin x + \sin x)$$

이므로 $u(x, y) = -e^{-y}(x\sin x + y\cos x) + \phi(y)$ 이다. 또, $-u_y(x, y) = v_x(x, y)$ 이므로

$$u(x, y) = -e^{-y}(x\sin x + y\cos x) + C \text{ (}C\text{는 상수)}$$

곡선 C 가 $x = \cos t, y = \sin t \ (0 \le t \le 2\pi)$ 로 정의된 원이므로

$$\begin{aligned} 6\pi &= \int_C -yu(x, y)dx + xu(x, y)\,dy \\ &= \int_0^{2\pi} \{(-\sin t)u(\cos t, \sin t)(-\sin t) + \cos t\, u(\cos t, \sin t)\cos t\}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} u(\cos t, \sin t)\,dt \end{aligned}$$

위 정리에 의해서

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{u(\cos t, \sin t) + iv(\cos t, \sin t)\}dt$$

$\int_0^{2\pi} u(\cos t, \sin t)dt = 6\pi$ 이므로 $f(0)$ 의 실수부분 $Re\, f(0) = 3$ 이다. 또, $f(0)$ 의 실수부분

$$Im\, f(0) = v(0,0) = 0$$

이다. 따라서 $C = u(0,0) = 3$ 이다. 즉, $u(x,y) = -e^{-y}(x\sin x + y\cos x) + 3$ 이다.

◎교재 p.614(13번) 해설 중

수정 전 :

(2) 점 $(1,1,0)$ 에서 $t = 1$ 이므로

$\alpha'(1) = (1, 3-a, 1)$, $\alpha''(t) = (0,6,0)$, $\alpha(1)' \times \alpha''(1) = (-6,0,6)$ 이다. 따라서

$\| \alpha(1)' \times \alpha''(1) \| = 6\sqrt{2}$ 이다. 따라서 곡률이 3 일 필요충분조건은 $a = 2$ 이다.

수정 후 :

(2) 점 $(1,1,0)$ 에서 $t = 1$ 이므로

$\alpha'(1) = (1, 3-a, 1)$, $\alpha''(t) = (0,6,0)$, $\alpha(1)' \times \alpha''(1) = (-6,0,6)$ 이다. 따라서

$\| \alpha(1)' \times \alpha''(1) \| = 6\sqrt{2}$ 이다. 따라서 곡률이 3 일 필요충분조건은 $a = 3$ 이다.

◎교재 p.620(26번) 해설 중

수정 전 :

(2) $\vec{n}$ 을 xy-평면에 정사영한 벡터 $\vec{p} = (-6, 6, 0)$ 이므로

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}\cdot\vec{p}}{\|\vec{n}\|\ \|\vec{p}\|} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ 이다.}$$

수정 전후 :

(2) $\vec{n}$ 을 xy-평면에 정사영한 벡터 $\vec{p} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0)$ 이므로

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}\cdot\vec{p}}{\|\vec{n}\|\ \|\vec{p}\|} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ 이다.}$$

◎교재 p.626(35번) 해설 중

수정 전 :

⑵ γ가 측지선이므로 측지곡률 $\kappa_g = 0$이고 곡률 κ에 대하여 $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2 = \kappa_n^2$이다. Euler의 공식에 의해서 곡률은 다음과 같다.

$$\kappa = |\kappa_n| = |\kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta| = \frac{\sqrt{15}}{3} \times (\frac{3}{5})^2 = \frac{16\sqrt{15}}{25}$$

수정 전후 :

⑵ γ가 측지선이므로 측지곡률 $\kappa_g = 0$이고 곡률 κ에 대하여 $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2 = \kappa_n^2$이다. Euler의 공식에 의해서 곡률은 다음과 같다.

$$\kappa = |\kappa_n| = |\kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta| = \frac{\sqrt{15}}{3} \times (\frac{3}{5})^2 = \frac{16\sqrt{15}}{75}$$